



# Análisis del despacho económico de energía eléctrica en Colombia usando Teoría de Juegos

## Analysis of the Economic Dispatch of Electric Power in Colombia Using Game Theory

José L. GUTIÉRREZ A. <sup>1</sup>; Octavio José SALCEDO Parra <sup>2</sup>; Juan Manuel SÁNCHEZ Céspedes <sup>3</sup>

Recibido: 25/04/2018 • Aprobado: 10/06/2018

### Contenido

1. Introducción
  2. Modelos Económicos de Despacho Económico
  3. Legislación Colombiana
  4. Modelo Colombiano
  5. Situación Actual del Sistema Eléctrico en Colombia
  6. Metodología
  7. Resultados
  8. Análisis de resultados
  9. Conclusiones
- Referencias bibliográficas

#### RESUMEN:

En este artículo se presenta una aproximación al modelo de despacho económico usando teoría de juegos considerando almacenamiento de energía. Para ello, se tiene en cuenta el modelo de despacho eléctrico colombiano y los cambios que representa la posibilidad de almacenar la energía eléctrica, un bien que se considera perecedero apenas se genera.

**Palabras-Clave:** Despacho Económico, Teoría de Juegos, Almacenamiento de Energía.

#### ABSTRACT:

This paper presents an approach to economic dispatch model using game theory considering energy storage. To do this, we consider the Colombian electricity dispatch model and the changes that represent the ability to store electrical energy.

**Keywords:** Economic Dispatch, Game Theory, Energy Storage.

## 1. Introducción

Cuando se habla de sistemas de energía eléctrica, comúnmente se muestran esquemas simplificados donde un sistema generador envía energía a una carga eléctrica a través de un sistema de transmisión; no lejos de la realidad, este sistema esconde el proceso por el cual se mueve económicamente la energía eléctrica, un sistema más complejo donde todos los entes en la cadena están relacionados. El modelo colombiano de economía eléctrica está hecho para controlar este despacho eléctrico desde un solo ente, el cual permite una casi independencia entre todas las empresas que están localizadas dentro del mercado, desde el generador hasta los usuarios finales (hogares o empresas); la regulación existente aplicada en Colombia es creada, de manera seria, en 1991.

## 2. Modelos Económicos de Despacho Económico

Los modelos económicos existentes que aplican en los sistemas de energía son presentados a continuación.

### 2.1 Monopolio Verticalmente Integrado

Este modelo de mercado se caracteriza porque todo el proceso de venta; es decir, la generación, transmisión y distribución de la energía la realiza una sola empresa (Ramirez, 2015).

### 2.2 Modelo de Comprador Único (Single Buyer)

Este modelo de mercado se caracteriza por que existe un único comprador, este modelo permite que haya una competencia imperfecta ya que el precio de los bienes lo determina el comprador. Para sistemas de energía tenemos el Generador Independiente (GI), el Generador Propio (GP) y la empresa distribuidora y comercializadora (DC) (Ramirez, 2015).

### 2.3 Modelo de Competencia Mayorista

En este tipo de competencias, los generadores independientes pueden vender la energía a los usuarios directamente o realizar la venta en un mercado mayorista que se encarga de vender a los distribuidores y/o comercializadores. (Ramirez, 2015).

### 2.3 Modelo de Competencia Minorista

Este tipo de modelo es el más complejo ya que, a diferencia del anterior, los generadores pueden lograr realizar acuerdos directos con los usuarios sin necesidad de entrar en un mercado mayorista de energía eléctrica; aun así, la comercialización de energía también entra en un mercado mayor donde los distribuidores y comercializadores juegan un papel en la entrega de la energía. (Ramirez, 2015).

## 3. Legislación Colombiana

Para el modelo colombiano, se realizaron unas disposiciones legislativas la cual conlleva a que se regulen los entes que conforman la cadena económica y que, en el mejor de los casos, los usuarios con los que se realiza la transacción de energía no se vean afectados por contratos realizados y puedan estar soportados a favor del cliente. Las leyes que construyen el modelo colombiano es el mostrado en la tabla 1.

**Tabla 1**  
Legislación Colombiana de Despacho Económico

LEY	ARTÍCULO

Ley 142 de 1994	Artículo 9.2: Derecho del usuario a escoger el prestador del servicio. Artículo 129: Celebración de contrato: condiciones uniformes.
Ley 143 de 1994	Artículo 7: Integración de Comercializadoras solamente con Generación o Distribución. Artículo 11: Definición de Usuario Regulado (UR) y No Regulador (UNR). Artículo 42: Los usuarios regulados siempre tendrán tarifa regulada. Los UNR pueden transar libremente (tarifas libres).
Ley 812 de 2003	Artículo 64, Decreto 3735: Define las zonas especiales de prestación del servicio público domiciliario de energía eléctrica y los esquemas diferenciales. Artículo 65, Decreto 3734: Establece la obligación para que todos los comercializadores que atienden usuarios regulados incorporen usuarios de estratos 1, 2 y 3. Define la universalización del servicio y la remuneración al Proveedor de Última Instancia (PUI).
Decreto 388 de 2007	Garantizar el sostenimiento del servicio a la población ya cubierta.
Decreto 387 de 2007	Socializar las pérdidas, definir los cargos fijos en comercio y define la compra de energía de forma eficiente

Fuente: Adaptación Autores

Los Proveedores de Última Instancia (PUI) deben cumplir con tres propósitos para el respaldo que se solicita, estos requisitos son:

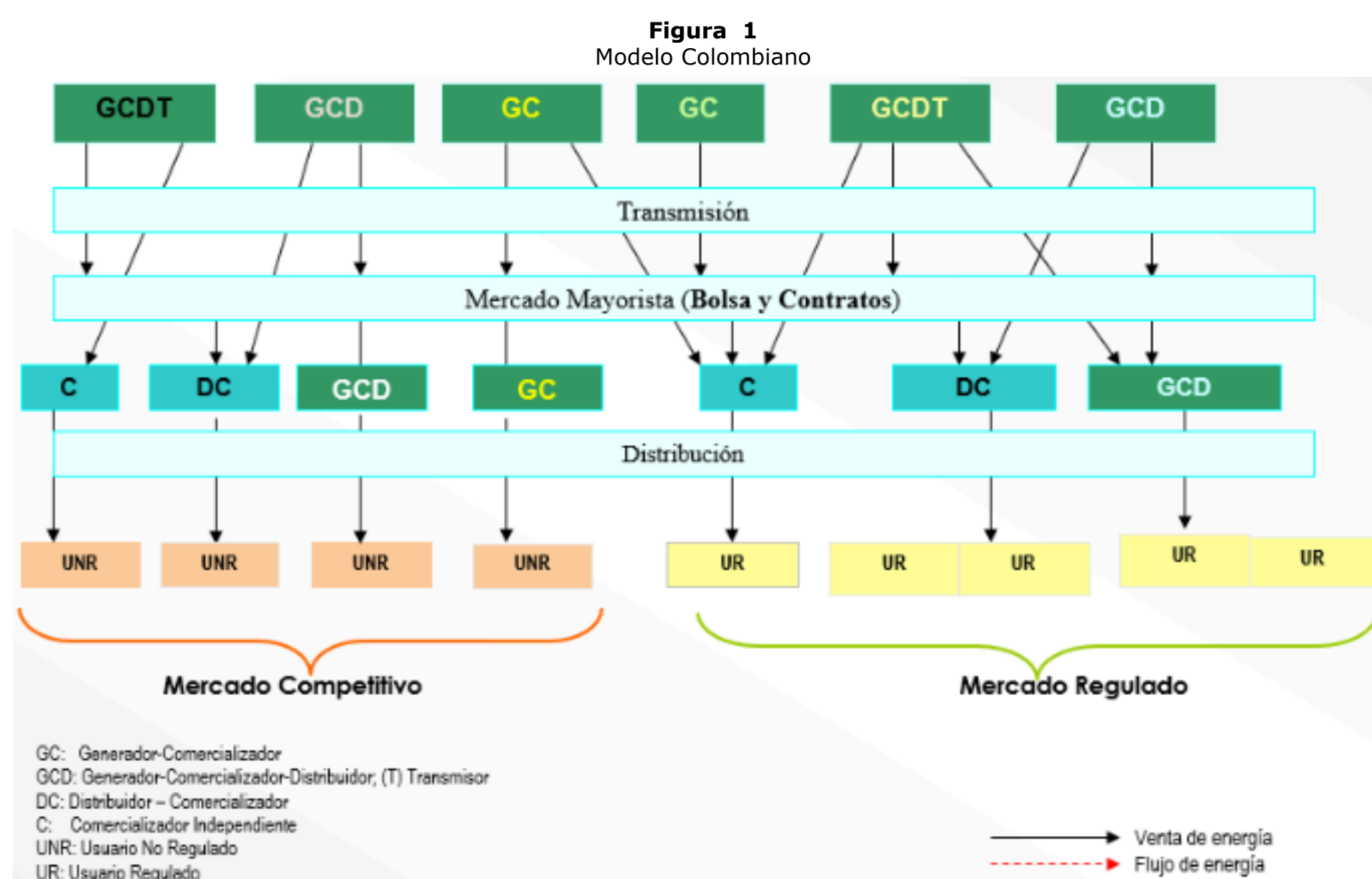
**Por Transición:** Para usuarios que no escogen un proveedor de energía eléctrica, en un mercado competitivo, por falta de educación, de información, etc.

**Garantía Continuidad:** Cuando un comercializador se quiebra, en ocasiones, se necesita de manera inmediata un proveedor, en el cual no sea necesario un proceso de negociación. Se presta un servicio de manera temporal.

**Garantía de Acceso:** Para usuarios que ningún comercializador quiere atender. Por lo tanto, el servicio de energía debe ser un servicio permanente.

## 4. Modelo Colombiano

El modelo colombiano suele estar basado en un modelo mixto entre el modelo de competencia minorista y el modelo de competencia mayorista, esto con el fin de que exista una competencia al detal, es decir, que las comercializadoras puedan comprar grandes cantidades de energía para distribuirlas a los usuarios finales; pero permite que los usuarios puedan adquirir el producto, un ejemplo de ello se observa en la figura 1.



Fuente: (Ramirez, 2015)

La particularidad del mercado eléctrico se debe a que se ha de realizar una coordinación extremadamente precisa cuando se realiza un despacho económico ya que se desea minimizar los costos relacionados a pérdidas de energía. El motivo de esto es que, al no existir un almacenamiento del producto, este se considera perecedero al momento de su generación y puede ser rápidamente desperdiciado sin haber sido usado, generando altos costos en toda la línea de producción y venta del producto.

## 5. Situación Actual del Sistema Eléctrico en Colombia

Para determinar la situación actual del mercado colombiano, se debe entender que significa tener una "Frontera Comercial". Una Frontera Comercial es, en términos económicos, un punto de medición que se asocia al punto de conexión entre los agentes y usuarios que están conectados al Sistema de Transmisión Nacional (STN), a los Sistemas de Transmisión Regional (STR), a los Sistemas de Distribución Local (SDL) o a los diferentes niveles de tensión del sistema (Niveles 1 a 4); entre estos agentes puede existir más de una frontera comercial.

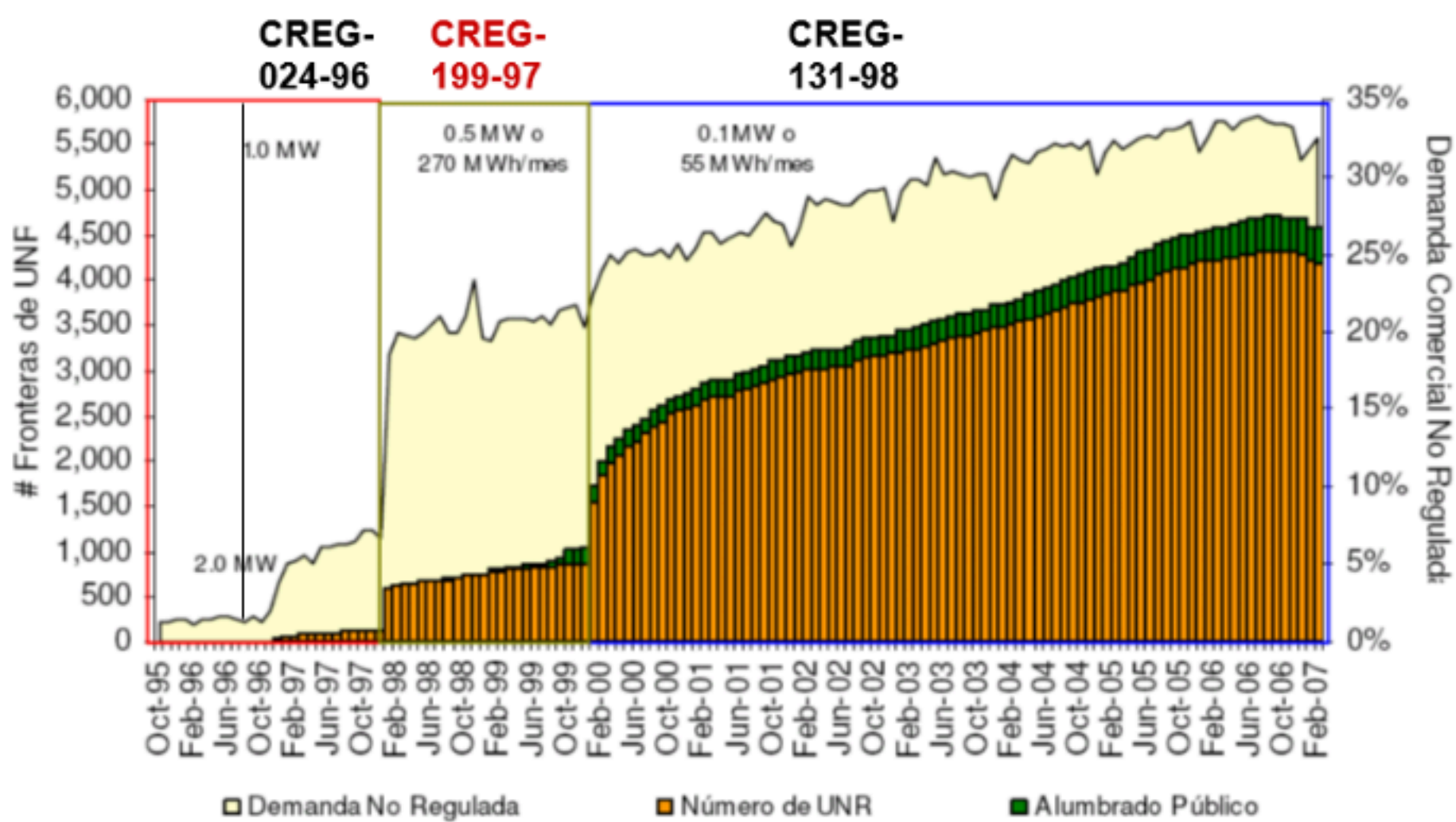
Actualmente, en el país existen aproximadamente 16623 fronteras comerciales registradas en el ASIC, estas fronteras se distribuyen como se observa en la Tabla 2 y Figura 2.

Tabla 2

TIPO	CANTIDAD
Tipo Consumo Propio y/o Auxiliar	143
Tipo Internacional	7
Tipo Entre Agentes	904
Tipo Alumbrado público sin equipo de medida	399
Tipo Regulado	9295
Tipo No Regulado	5600
Tipo Tie	20
Tipo Generación	255

Fuente: Adaptación Autores

Figura 2  
Modelo Colombiano



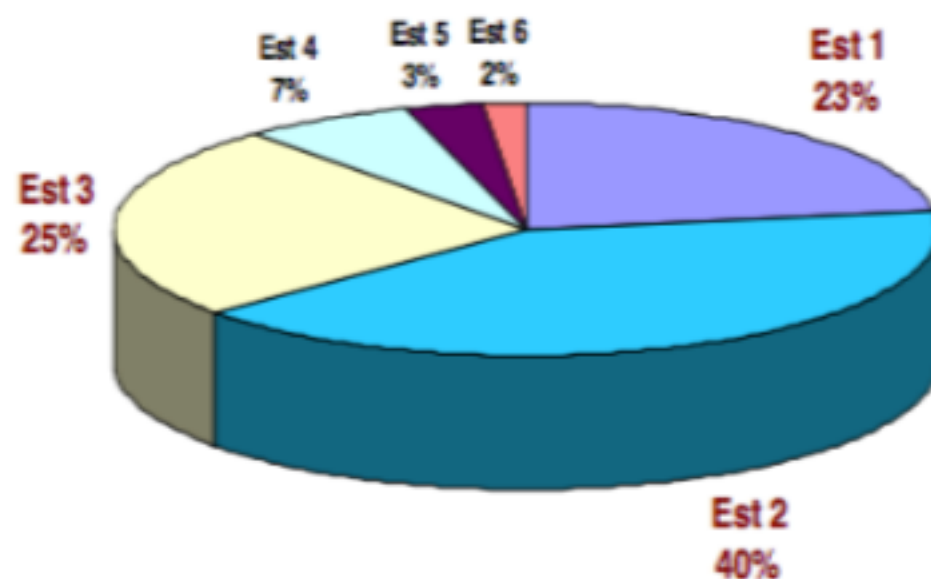
Fuente: (Ramirez, 2015)

Actualmente, en el mercado regulado, Colombia cuenta aproximadamente 9.044.542 usuarios de los cuales 8.263.455 (60%) son usuarios residenciales con un consumo aproximado de 17.000 GWh-año, el restante 781.087 (40%) son usuarios no residenciales con un consumo de 11.000 GWh-año.

Al dividir el mercado entre estratos, Se puede notar que el estrato 1 posee 1.900.595 (23%) de los usuarios totales con un consumo de 3.740 GWh-año (22%), en el estrato 2 hay 3.305.382 (40%) de los usuarios totales con un consumo total de 5.950 GWh-año (35%), en el estrato 3 hay 2.065.864 (25%) de usuarios con un consumo al año de 4.250 GWh (25%) de la potencia total, en el estrato 4 hay 578.442 (7%) de los usuarios residenciales con un consumo de 1.530 GWh-año (9%) del consumo total, para el estrato 5 tenemos 247.904 (3%) de usuarios con un consumo anual de 850 GWh-año (5%) y en el estrato 6 hay 165.269 (2%) de usuarios con un consumo anual de 680 GWh-año (4%).

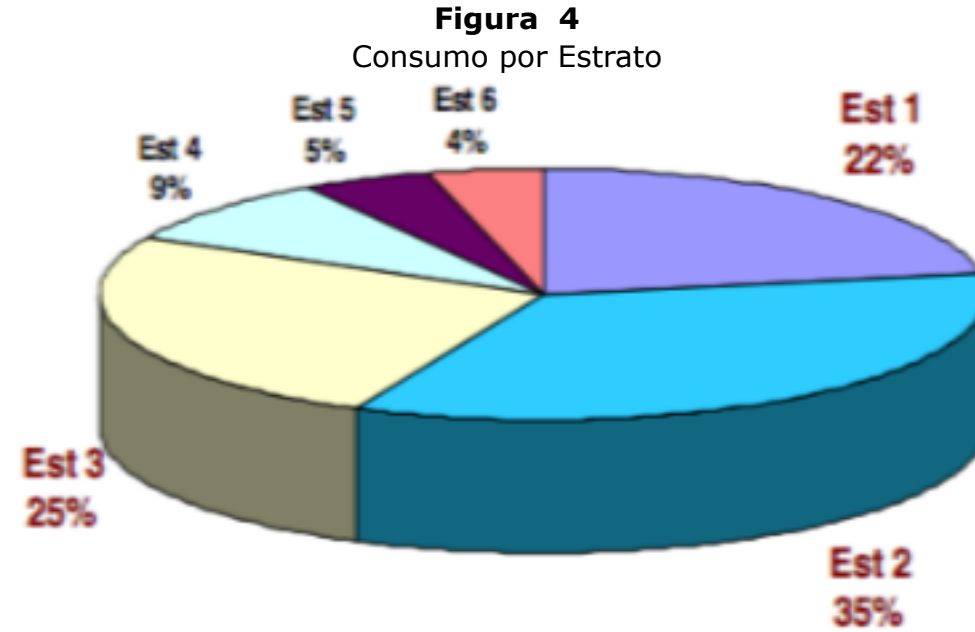
En las Figuras 3 y 4 se puede ver los datos nombrados anteriormente, inicialmente se muestra los usuarios por estrato y seguido el consumo por los mismos.

Figura 3  
Usuarios por Estrato



Fuente: (Ramirez, 2015)





Fuente: (Ramirez, 2015)

Si observamos las Figuras 3 y 4, podemos notar que hay una relación directa entre la cantidad de usuarios y el consumo de energía eléctrica; pero ni en volumen, ni en usuarios, la competencia al detal que se le da al usuario regulado ha sido importante, esto se da por los requisitos de medida y la tecnología aplicada sumado a la desinformación que se tiene por parte del usuario y las fallas en el cambio del comercializador.

Por lo que, a pesar de contar con un mercado mayorista desarrollado, el usuario de servicio colombiano no es sofisticado y aún existe indicios que muestran que, hoy en día, los usuarios eligen al comercializador por el precio principalmente. Y, actualmente, no hay un aumento en los competidores que puedan entrar en la competencia del mercado eléctrico a corto plazo.

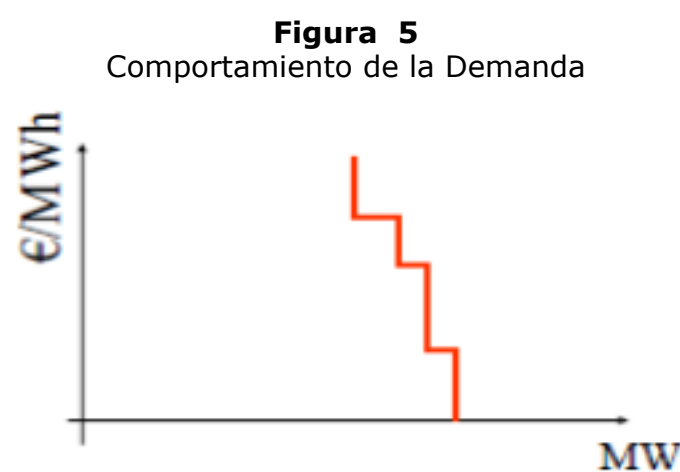
## 6. Metodología

El despacho económico son aquellas tareas que están destinadas a dar instrucciones para coordinar la correcta operación de las plantas generadoras, las líneas de transmisión y todos los servicios de un sistema de potencia. Este despacho permite gestionar de una mejor manera los flujos de energía eléctrica en la red de transmisión para poder mantener un equilibrio entre la potencia demandada y la potencia generada. Este equilibrio se realiza ingresando un factor económico que permite un negocio comercial teniendo en cuenta ciertos criterios de decisión.

El mercado eléctrico puede ser manejado de diversas maneras. Una de ellas es en base a la teoría de juegos, ya que el modo en que se produce el despacho eléctrico puede ser modelado con este tipo de teorías al cumplir los requisitos. Para realizar un correcto modelo de teoría de juegos, se debe conocer el comportamiento de cada uno de los agentes implicados dentro del modelo.

### 6.1. La Demanda

La demanda son las cargas que consumen energía eléctrica. Si se posee una gran cantidad de consumidores, se puede realizar una aproximación de la función de precio. Este precio va a tener un comportamiento inverso a la demanda, es decir, que el precio se verá incrementado en el momento en que la demanda decrece (Ciccarelli & Pisani, 2011). La Figura 5 presenta este comportamiento.

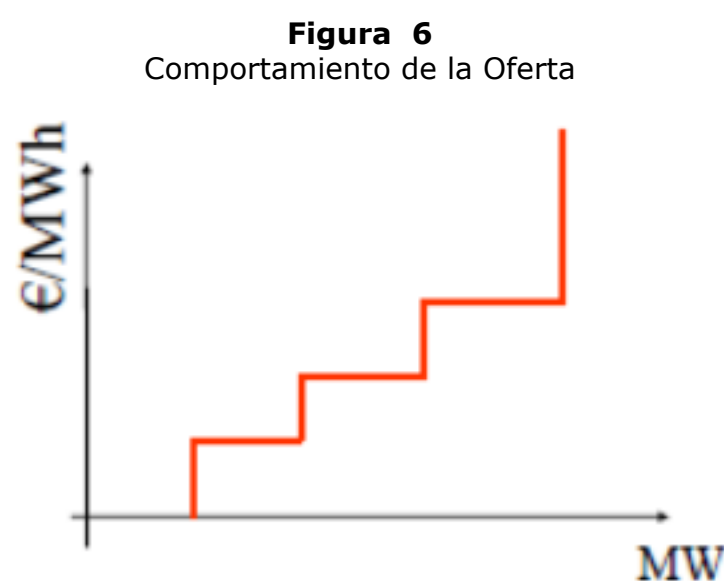


Fuente: (Ciccarelli & Pisani, 2011)

La Figura 5 presenta el Precio Marginal del consumidor, este precio representa el costo que el usuario está dispuesto a pagar por cierta cantidad de energía.

### 6.2. La Oferta

La oferta se refiere a la cantidad de energía que está disponible para ser consumida, es decir, la energía que requieren los consumidores. El comportamiento de la curva de oferta se debe a que la cantidad de energía que se genera depende de que tanto desea generar el productor al mercado, y este último factor depende de las condiciones del mercado.

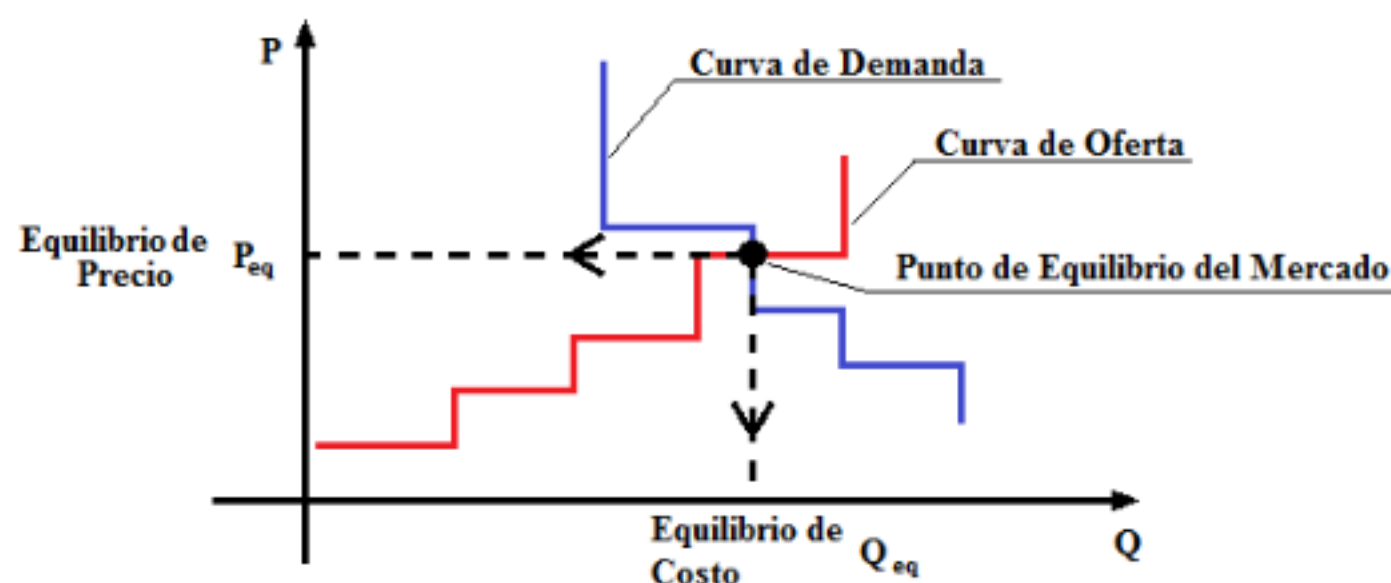


Fuente: (Ciccarelli & Pisani, 2011)

### 6.3. Punto de Equilibrio

Los productores y los consumidores están interactuando constantemente en el mercado. Si el mercado es perfectamente competitivo, se dice que las acciones de uno u otro (productor o consumidor) no influyen el comportamiento del otro, por lo que existe una competencia perfecta y las curvas de comportamiento serían las observadas en la Figura 7.

**Figura 7**  
Punto de Equilibrio



Fuente: (Ciccarelli & Pisani, 2011)

Cuando la cantidad de energía que los productores desean vender es igual a la cantidad de energía que los consumidores desean comprar, se dice que el mercado está en un balance de mercado.

## 6.4. El Problema de Despacho Eléctrico

Inicialmente, se sabe que los generadores no pueden encenderse instantáneamente y, por lo tanto, producir energía, para ello se ha de tener en una planeación anticipativa para tener siempre una generación suficiente disponible para entregar la potencia necesaria a la demanda y tener un margen de reserva adecuado en caso de que existan fallas en el sistema de transmisión o la demanda se incremente. Para controlar una posible pérdida de potencia en el sistema, existe un ente que controla el programa de las unidades de generación, esto con el objetivo de minimizar los costos de operación y satisfacer las restricciones del sistema. El problema clásico al que se enfrenta este ente de despacho energético es el inicio y el apagado de las unidades de generación térmicas para poder satisfacer la demanda prevista en los tiempos solicitados.

## 6.5. Formulación del Problema acorde a la Teoría de Juegos

Para el despacho económico se debe tener en cuenta que los jugadores, en este caso los generadores, no trabajan como un grupo; en cambio, trabajan como entes independientes que buscan maximizar el beneficio propio, por ello, el despacho económico se considera un juego no cooperativo. La ecuación de beneficio que los generadores trabajan está dada por la ecuación (1) (Yunpeng, Walid, Zhu, Vincent Poor, & Basar, 2014; Mojica-Nava, 2015).

$$B_k = \sum_{j \in \Omega_k} \{p_j \cdot PG_j - [a_j + b_j PG_j + c_j PG_j^2]\} \quad (1)$$

Dónde  $\Omega_k$  es el grupo de unidades generadores pertenecientes a la utilidad  $k$ , y  $p_j$  es el precio de mercado en el nodo  $j$ . El costo de generación está dado por la ecuación (2) (Yunpeng, Walid, Zhu, Vincent Poor, & Basar, 2014).

$$C_{(CP)} = a + bPG + cPG^2 \left(\frac{\$}{h}\right) \quad (2)$$

La función de pagos para el jugador  $k$  está dada por la ecuación (3) (Yunpeng, Walid, Zhu, Vincent Poor, & Basar, 2014; Mojica-Nava, 2015; Mojica-Nava, 2015; Webb, 2007).

$$u_k: \prod_{i=1}^{\psi} S_i \rightarrow R \quad (3)$$

Donde  $(S_1, S_2, \dots, S_{\psi}) \rightarrow B_{\psi}$ ,  $\psi$  es el número de utilidades. Otra restricción del sistema es que cada generador conoce solamente su propia función de pagos mientras que toda la información es conocida por el despachador, esto implica que el comportamiento económico de los generadores, en el mercado, puede ser analizada por el centro despachador como un Juego Estático con Información Completa y Perfecta.

## 6.6. Modelo del Sistema

Se considera el sistema con  $K$  cantidad de compradores y  $N$  cantidad de vendedores. Dentro del sistema de potencia existe  $n$  cantidad de sistemas de almacenamiento. Cada comprador  $k \in K$  tiene un precio máximo al que está dispuesto a comprar la energía  $xk$ ; mientras el vendedor está dispuesto a vender la energía generada a un precio  $bk$ . Desde las unidades de almacenamiento, cada unidad  $i \in N$  puede elegir una cantidad de energía  $a_i$  para vender, esta energía estará dada por: la ecuación (4) (Yunpeng, Walid, Zhu, Vincent Poor, & Basar, 2014).

$$a_i \leq B_i \triangleq (C_{i,max} - D_i) \quad (4)$$

Donde  $B_i$  es el máximo total de energía que el vendedor  $i$  desea vender en el mercado,  $C_{i,max}$  es la máxima capacidad de almacenamiento que posee la unidad, y  $D_i$  se considera la energía que cada unidad de almacenamiento  $i$  desea mantener y que no está interesada en vender. Ya que es un problema no cooperativo, las decisiones y las interacciones entre los jugadores son de carácter complejo y se ha de analizar de acuerdo a la ecuación 5 (Yunpeng, Walid, Zhu, Vincent Poor, & Basar, 2014).

$$\Xi = \{N, \{A_i\}_{i \in N}, \{U_i\}_{i \in N}\} \quad (5)$$

Según las ecuaciones del (1) a la (5), se tienen los elementos de la tabla 3.

**Tabla 3**  
Tipos de Consumo



SÍMBOLO	DESCRIPCIÓN
N	Número total de vendedores
K	Número total de compradores
i,j	El <i>i</i> -ésimo y/o <i>j</i> -ésimo vendedor.
k	El <i>k</i> -ésimo comprador.
$S_i$	El precio de reserva del vendedor <i>i</i>
$b_k$	La oferta de reserva del comprador <i>k</i>
$a_i$	La acción del vendedor <i>i</i>
$x_k$	La demanda del comprador <i>k</i>
L	El número total de vendedores participantes
M	El número total de compradores participantes
$U_i$	La utilidad del vendedor <i>i</i>
$a_{-i}$	La acción de los demás vendedores exceptuando <i>i</i>
P	El precio de cotización
q	La energía vendida
Q	La función de acción para intercambio de energía
$\beta$	La energía sobre ofertada

Fuente: (Yunpeng, Walid, Zhu, Vincent Poor, & Basar, 2014)

La Ecuación (5). Modelo Matemático para Teoría de Juegos. Posee 3 elementos principales para ser desarrollados en el modelo de teoría de juegos:

1. Existe un número determinado de jugadores  $N$ .
2. Las estrategias o acciones de cada jugador  $i \in N$  el cual busca una cantidad de energía igual a  $a_i \in A_i = [0, B_i]$  que será vendida.
3. La función de utilidad  $U_i$  para cada vendedor  $i \in N$ .

Se debe notar que en la Ecuación (5) Modelo Matemático para Teoría de Juegos, no se encuentra incluida el valor  $s_i$ , no se incluye como parte de la estrategia que está definida por el vendedor  $i$ . Esto quiere decir que el vendedor va a mostrar los precios de reserva cuando está participando en el juego; esto se realiza de esta manera ya que los entes de generación poseen un mecanismo de doble subasta tal que garantice que ningún vendedor o comprador pueda beneficiarse cambiando sus precios u ofertas. Por lo tanto, Dado una estrategia  $a_i$  para cada una de las unidades de almacenamiento  $i \in N$ , la función de utilidad puede ser descrita como la ecuación (6) (Yunpeng, Walid, Zhu, Vincent Poor, & Basar, 2014; Mojica-Nava, 2015).

$$U_{(a_i, a_{-i})} = \sum_{k \in K} (p_{ik}(a) - S_i) q_{ik}(a) - f(\sum_{k \in K} q_{ik}(a)) \quad (6)$$

Donde  $a$  es el vector  $N \times 1$  de todas las estrategias seleccionadas,  $a_{-i} = [a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, \dots, a_N]^T$  es el vector de acciones seleccionadas por los oponentes de la unidad de almacenamiento  $i$ ,  $p_{ik}(a)$  es el precio al cual la energía es negociada entre el vendedor  $i$  y el comprador  $k$ ,  $f(\cdot)$  es la función que refleja el costo de la energía que se está vendiendo.

La Función de Utilidad ecuación (6), se puede enunciar que la función de costo de la energía tiene un comportamiento incremental dependiente de la cantidad  $\sum_{k \in K} q_{ik}(a)$  que es vendida en total por la unidad de almacenamiento  $i$ . Por tal motivo la ecuación (6), sirve también como función de la cantidad de energía  $x_k$  que cada comprador desea comprar y de las ofertas de los demás compradores.

El objetivo de cada unidad de almacenamiento  $i$  es la de elegir una estrategia  $a_i \in A_i$  para poder maximizar su utilidad. Para poder obtener este punto deseable, se debe considerar una solución factible para todos los  $N$  problemas de optimización que los vendedores necesitan resolver. Observando la Ecuación (6) se puede notar que los vectores de estrategias seleccionadas por los vendedores pueden tener diferentes precios de venta  $p_{ik}(a)$ . Cabe aclarar que este precio también incluye el valor de reserva de los vendedores, la cantidad comprada y la oferta de reserva de los compradores.

Para el juego propuesto, se realiza una aproximación de doble subasta, ya que esta permite que los vendedores y los compradores tengan que decidir sobre la conveniencia de ser veraz en las ofertas y precios, dada por las siguientes condiciones:

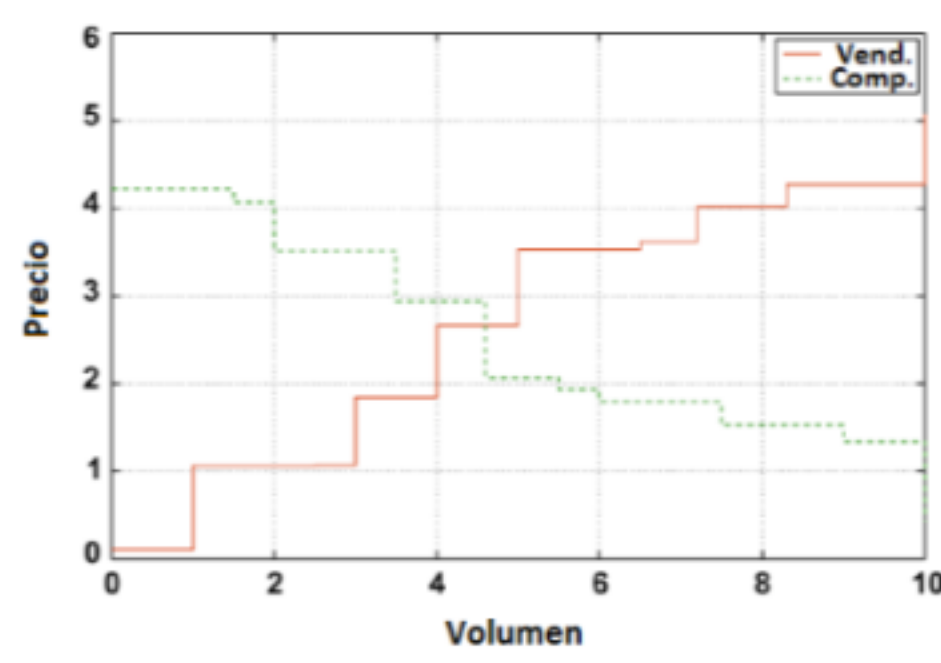
1. La utilidad potencial que se obtiene está dada por el término  $\sum_{k \in K} (p_{ik}(a) - s_i) q_{ik}(a)$  en la ecuación (6).
2. Las ganancias de los compradores potenciales está dada por  $\sum_{i \in N} (b_k - p_{ik}) q_{ik}$  siendo  $q_{ik}$  la cantidad comprada por  $k$  de  $i$ .

Con lo anterior, el primer paso a realizar es ordenar a los vendedores en orden creciente de sus precios ( $S_1 < S_2 < \dots < S_N$ ), El siguiente paso es ordenar los compradores en orden decreciente de sus valores de oferta ( $b_1 > b_2 > \dots > b_k$ ). Siguiendo el planteamiento de las ecuaciones anteriores, se puede asumir que, si dos compradores (o vendedores) poseen el mismo precio, se pueden agrupar en un único grupo, considerándolos un único comprador o vendedor virtual.

Siguiendo el proceso anterior, se construye la curva de oferta, es decir, el precio de venta  $s_i$  como una función de la energía a vender  $a_i$ ,  $\forall i \in N$ . Y la curva de demanda, es decir, la oferta del comprador  $b_k$  como una función de la energía requerida  $x_k$ ,  $\forall k \in K$ . Estas dos curvas se intersectarán en el punto correspondiente a un vendedor  $L$  y un comprador  $M$  con la condición de  $b_M \geq S_L$ , como se observa en la figura 8

**Figura 8**  
Curva de oferta y demanda del despacho de energía





Una vez determinados los vendedores y los compradores que se encuentran en la intersección de la gráfica, se analiza la subasta a realizar dando como resultado que  $L - 1$  vendedores y  $M - 1$  compradores participarán en el mercado.

El siguiente paso es garantizar una total suplencia en la demanda, los vendedores y los compradores entrarán en subasta para determinar los precios en el mercado y, de esta manera, identificar la intersección. Cuando se determina el punto en común para ambos agentes, se selecciona un punto entre el intervalo  $[S_i, b_M]$ . Para el mercado, dada una estrategia  $a$  del vendedor, se asume que todos los vendedores  $i < L$  y los compradores  $k < M$  van a cambiar los precios en base a la ecuación (7) (Yunpeng, Walid, Zhu, Vincent Poor, & Basar, 2014).

$$\bar{p}(a) = \frac{S_L + b_M}{2} \quad (7)$$

Al observar la ecuación (7), el precio dependerá de la estrategia seleccionada por el vendedor, es decir, para cada máximo de energía a vender, el punto de intersección de la demanda y la oferta puede variar. Una vez el precio de mercado es encontrado, se busca la cantidad de energía que se va a transar entre el vendedor  $L - 1$  y el comprador  $M - 1$ . Inicialmente, dado los valores de intercambio unificado, los vendedores  $L - 1$  serán indiferentes entre los compradores, es decir, la utilidad de cada vendedor dependerá solamente de la cantidad vendida y no del comprador quien compró esa cantidad. Asumiendo que la función de costo  $f(\cdot)$  es cuadrática, la función se representaría por la ecuación (8) (Yunpeng, Walid, Zhu, Vincent Poor, & Basar, 2014; Mojica-Nava, 2015).

$$U_i(a_i, a_{-i}) = (\bar{p}(a) - S_i)Q_i(a) - \tau_i Q_i^2(a) \quad (8)$$

Siendo  $Q_i(a)$  la cantidad total de energía vendida por  $i$ ,  $\tau_i$  es el factor de penalización que pesa sobre el costo de la unidad  $i$  cuando se descarga/vende energía. Una vez la subasta es finalizada, las diferentes aproximaciones pueden ser aplicadas para encontrar la cantidad de energía comercializada entre cada uno de los participantes del mercado. Para este caso, se usa una aproximación en la cual el volumen total de energía  $Q_i(a)$  que es vendido por cualquier generador  $i$ , para una estrategia dada por la ecuación (9) (Yunpeng, Walid, Zhu, Vincent Poor, & Basar, 2014; Mojica-Nava, 2015).

$$Q_i(a) = \begin{cases} a_i & \text{Si } \sum_{k=1}^{M-1} x_k \geq \sum_{j=1}^{L-1} a_j \\ (a_i - \beta_i)^+ & \text{Si } \sum_{k=1}^{M-1} x_k \leq \sum_{j=1}^{L-1} a_j \end{cases} \quad (9)$$

En este caso  $(a)^+ = \max(0, a)$  y  $\beta_i$  representa una fracción de la energía excedida  $\sum_{k=1}^{M-1} x_k - \sum_{j=1}^{L-1} a_j$  que se ha asignado por el vendedor  $i$ . En la Ecuación (9) implica que, siempre que el total de la demanda en la subasta exceda la oferta, entonces cada uno de los vendedores  $i$  venderá la totalidad de la energía  $a_i$  que se ha de introducir en el mercado. Sin embargo, cuando la oferta exceda la demanda total, todos los vendedores compartirán equitativamente la energía excedida. En este punto,  $\beta_i = \frac{(\sum_{k=1}^{M-1} x_k - \sum_{j=1}^{L-1} a_j)}{(L-1)}$ . No obstante, si, para el

vendedor  $i$  se tiene que  $\frac{(\sum_{k=1}^{M-1} x_k - \sum_{j=1}^{L-1} a_j)}{(L-1)} > a_i$ , entonces, el vendedor  $i$  no venderá. El excedente restante  $\frac{(\sum_{k=1}^{M-1} x_k - \sum_{j=1}^{L-1} a_j)}{(L-1)} - a_i$ , de este vendedor es dividido equitativamente entre los otros  $L - 2$  vendedores y el resultado es agregado a su participación  $\beta_j, j < L, j \neq i$ . El esquema anterior se repetirá continuamente hasta que todos los vendedores logren vender a una cantidad no negativa.

En el caso de exceso de oferta, la energía total que ingresa al mercado por los vendedores  $\sum_{j=1}^{L-1} a_j$  es mayor o igual a la energía demandada por los compradores  $\sum_{k=1}^{M-1} x_k$ , por lo tanto, la energía real que obtiene el vendedor es:  $\sum_i q_{ik} = x_k$ . Para el caso de sobredemanda, la cantidad de energía requerida por los compradores, excede la cantidad que los vendedores ponen en el mercado, es decir,  $\sum_i q_{ik} < x_k$ .

## 7. Resultados



Teniendo en cuenta que cada uno de los jugadores en el juego buscan maximizar su objetivo, se plantea encontrar el Equilibrio de Nash ya que, de esta manera, ningún jugador podrá seleccionar otra estrategia ya que reduciría sus ganancias. Considerando el juego no cooperativo en forma normal  $\Xi = \{N, \{A_i\}_{i \in N}, \{U_i\}_{i \in N}\}$  con  $U_i$  dado por la ecuación (8). Función de Costo Un vector de estrategias  $a^*$  se dice que es un equilibrio de Nash, si y solo si, esta satisface la desigualdad de la ecuación (10) (Yunpeng, Walid, Zhu, Vincent Poor, & Basar, 2014).

$$U_i(a_i^*, a_{-i}^*) \geq U_i(a_i', a_{-i}^*), \forall a_i' \in A_i, i \in N \quad (10)$$

En el modelo propuesto, la función  $U_i$  posee una continuidad al existir un  $A_i = F_i(A_{-i}), \forall a \in A$  tal que  $U_i(F_i(a_{-i}), a_{-i})$  posee una continuidad en  $a_{-i}$ . En particular, una función es continua si el vector de estrategias es compacto. Así, debido la discontinuidad en la función de utilidad, se define como la ecuación (11) (Yunpeng, Walid, Zhu, Vincent Poor, & Basar, 2014).

$$\bar{p}(a_i, a_{-i}) = p_1; \bar{p}(a_i, a_{-i} + \Delta a) = p_2 \quad (11)$$

Dada la ecuación (12), se puede asumir que, dado un rango  $\Delta a$ , se tiene la ecuación (12) (Yunpeng, Walid, Zhu, Vincent Poor, & Basar, 2014).

$$\bar{p}(a_i, a_{-i}) = \frac{p_2 - p_1}{\Delta a} \Delta a_{-i} \quad (12)$$

Si tomamos la ecuación anterior y asimismo que  $\Delta a$  posee un valor pequeño, la pendiente de la función se vuelve infinita, esto implica que la función es una función por partes en  $a_{-i}$ .

Matemáticamente,  $U_i(a_i, a_{-i})$  posee una semicontinuidad superior en  $a_{i0}$  si allí existe un vecindario  $a_i$  tal ecuación (13) (Yunpeng, Walid, Zhu, Vincent Poor, & Basar, 2014).

$$\lim_{a_i \rightarrow a_{i0}} \sup U_i(a_i, a_{-i}) \leq U_i(a_{i0}, a_{-i}) \quad (13)$$

Similarmente, para la función de utilidad, se define un  $a_{i0} = a_i + \Delta a$  tal que  $p_3 \leq p_4$ . la función de utilidad es semicontinua superiormente por que los jugadores están buscando el más alto beneficio alrededor de los puntos de trabajo. En este punto solo se necesita probar que la función de utilidad es semi-cóncava. En un rango de precio constante, se puede obtener las ecuaciones (14), (15) y (16) (Yunpeng, Walid, Zhu, Vincent Poor, & Basar, 2014; Mojica-Nava, 2015).

$$f(Q) = (\bar{p} - s_i)Q - Q^2 \quad (14)$$

$$Q_i(a) = \begin{cases} a_i & \text{Si } \sum_{k=1}^{M-1} x_k \geq \sum_{j=1}^{L-1} a_j \\ (a_i - \beta_i)^+ & \text{Si } \sum_{k=1}^{M-1} x_k \leq \sum_{j=1}^{L-1} a_j \end{cases} \quad (15)$$

$$U_i = f(Q(a)) \quad (16)$$

$Q(a)$  se comporta como una componente doble, así, es tanto semi-cóncava como semi-convexa, por lo tanto es una función semilineal. Siguiendo el modelo propuesto, se puede obtener la derivada parcial ecuaciones (17) y (18) de la ecuación (16) (Yunpeng, Walid, Zhu, Vincent Poor, & Basar, 2014; Mojica-Nava, 2015).

$$\frac{\partial U(Q)}{\partial Q} = \bar{p} - s_i - 2Q \quad (17)$$

$$U(\lambda Q_x + (1 - \lambda)Q_y) \geq \lambda U(Q_x) + (1 - \lambda)U(Q_y) \quad \forall Q_x \neq Q_y, \lambda \in (0,1) \quad (18)$$

Ya que la función  $U(Q)$  es una función cóncava, se obtiene las ecuación (19) (Yunpeng, Walid, Zhu, Vincent Poor, & Basar, 2014; Mojica-Nava, 2015).

$$U[Q(\lambda a_i^x + (1 - \lambda)a_i^y, a_{-i})] \geq U[\min\{Q(a_i^x, a_{-i}), Q(a_i^y, a_{-i})\}] \geq \min\{U[Q(a_i^x, a_{-i})], U[Q(a_i^y, a_{-i})]\} \quad (19)$$

Intuitivamente, la derivada parcial de  $U$  en  $Q$  es positiva antes del máximo local de  $U$  y negativa después de este. Otra consideración que se tiene es que la derivada parcial de  $Q$  en  $a_i$  es 1 u otro número no negativo dependiendo de la subasta realizada exceptuando en el punto de inflexión, que se da cuando  $a_i = \beta_i$ .

Alrededor del punto de inflexión  $U(a_i, a_{-i})$  hay un incremento y luego decrece cuando  $a_i$  se varía de rango. Luego de ello,  $U(a)$  se convierte en una función semicóncava en  $a$ , en el juego  $\Xi = \{N, \{A_i\}_{i \in N}, \{U_i\}_{i \in N}\}$  posee una estrategia pura y, por lo tanto, posee un equilibrio de Nash que satisface las condiciones requeridas.

Para cualquier equilibrio de Nash en el juego propuesto, ninguna unidad de almacenamiento puede mejorar sus utilidades a partir de un cambio unilateral de la máxima cantidad de energía que se desea vender, dado un equilibrio en las estrategias de las demás unidades de almacenamiento. Habiendo establecido una existencia de estas, por lo que se debe desarrollar el esquema que permita al juego  $\Xi$  llegar a un equilibrio de Nash. Para ello, se definen las nociones de Mejor Respuesta

La mejor respuesta  $r(a_{-i})$  de cualquier unidad de almacenamiento  $i \in N$  posee un vector de estrategias dado por  $a_{-i}$  que posee las mejores decisiones para el vendedor  $i$  como se muestra en la ecuación (20) (Yunpeng, Walid, Zhu, Vincent Poor, & Basar, 2014; Mojica-Nava, 2015).

$$r(a_{-i}) = \{a_i \in A_i | U_i(a_i, a_{-i}) \geq U_i(a_i', a_{-i}), \forall a_i' \in A_i\} \quad (20)$$

De esta manera, para cualquier unidad de almacenamiento  $i \in N$ , cuando otra estrategia de alguna unidad de almacenamiento es elegida en el vector  $a_{-i}$ , cualquier mejor estrategia en  $r(a_{-i})$  es igual de buena que cualquier otra estrategia en  $A_i$ . Usando el concepto de mejor respuesta, se puede definir un proceso (derivativo en un algoritmo) que permita ser usado por los vendedores y los compradores para el mercado de intercambio energético.

Si observamos el teorema 1, podemos comprobar que, un algoritmo, puede converger a un equilibrio de Nash para cualquier juego.

**Teorema 1:** Existe un componente de búsqueda  $w$  tal que  $0 < w < 1$ , que permite converger a un equilibrio de Nash en un algoritmo iterativo dado por la ecuación (21) (Yunpeng, Walid, Zhu, Vincent Poor, & Basar, 2014; Mojica-Nava, 2015).

$$a_i^{(n+1)} = (1 - w)r(a_{-i}^{(n)}) + w a_i^{(n)} \quad (21)$$

## 8. Análisis de resultados

Como se ha mencionado anteriormente, la teoría de juegos permite resolver problemas en los que se involucren entes racionales, es decir, que toman decisiones de manera que solo desean maximizar los beneficios propios o minimiza las pérdidas sin actuar afectando



directamente la competencia. Al realizar investigaciones, se descubrieron teorías manejadas en países como Chile. (Villar & Rudnick, 2002), como Brasil (Azevedo, Correia, Correia, & Munhoz, 2003) o el mercado latinoamericano (Saguan, Keseric, Dessante, & Glachant, 2006).

Al comparar los modelos mostrados anteriormente, se encuentra un patrón de trabajo similar, principalmente, en la elección del modelo de Cournot como base de trabajo para realizar el modelo de despacho eléctrico. Como se indicó anteriormente, este modelo se elige por la forma como se estructura, ya que se hace directamente con la cantidad de producto a producir. Hoy en día muchos mercados trabajan con un ente regulador del mercado (Caso Colombia e Inglaterra), esto permite un mayor control en las ofertas y demandas en el mismo. Pero, aún con un ente regulador, es importante aprender y tener en cuenta este tipo de modelos para que, desde el punto de vista del generador, éste pueda entrar en competencia con los demás jugadores dentro del mercado. A diferencia de países como Chile, Argentina, Bolivia y Perú que realizan el despacho económico según el costo de generación más no el precio (Watts Casimis, 1998).

Actualmente en Colombia, el mercado eléctrico se rige por una entidad de control que realiza el despacho económico dependiendo de los precios que los generadores entreguen. Aunque este sistema permite mejor control sobre los jugadores, los generadores deben hacer estudios económicos sobre el precio que ofertarán al día siguiente. Aunque esto no es aplicable para la Teoría de Juegos manejada, pero se debe tener en consideración en una situación hipotética donde no exista un control central. En caso de que se deba aplicar teoría de juegos en el despacho económico colombiano, se deberá realizar un mejor control sobre el mercado. Estos controles deberán incluir modelos que permitan un mercado eléctrico competitivo para las grandes generadoras, teniendo en cuenta que no todas tienen la misma capacidad de generación ni poseen la misma velocidad de respuesta. Esto, siguiendo las reformas llevadas a cabo en países como Reino Unido, Chile, California, España y los Países Nórdicos (Fabra, 2010).

Otra consideración que debe tomarse al realizar un modelo Colombiano, es la forma como se transmite la energía eléctrica, ya que al existir un único ente en transmisión, este deberá tener restricciones, muchas de ellas existentes, para evitar el beneficio de una u otra empresa dentro del mercado. De esta manera los jugadores enmarcados dentro de la competencia, trabajarán con una matriz de pago más homogénea. Otras consideraciones que se deben tener al mejorar el modelo de despacho basados en Teoría de Juegos, son los mostrados de acuerdo a las notas sacadas de (Fabra, 2010), estas son: El modelo usado en el despacho económico no tiene solución cuando la demanda es inelástica al precio, el modelo de Cournot sobreestima el poder del mercado ya que el precio del producto es calculado de manera ineficiente, aun cuando el modelo de Cournot posee límites para ser aplicado, es el único modelo válido para trabajar despacho económico ya que es inmune a la condición que poseen los jugadores, es decir, no basa su búsqueda de óptimos observando el vendedor, sino que observa el efecto que tiene la decisión sobre los compradores, Principalmente, para Colombia, se debe considerar la normativa aplicable a los jugadores (generadores) para su despacho económico, ya que muchas poseen restricciones en términos ambientales. Esto influye en el juego al ingresar un factor de penalización que es único para cada jugador (Fabra, 2010).

Además de lo anterior, es importante tener en cuenta a los pequeños generadores que pueden verse afectados por el ingreso de jugadores con más capacidad competitiva, lo que lleva a que su pago (en términos de teoría de juegos) sea muy bajo para poder ingresar al juego, o, que no pueda ser considerado. Lo anterior llevaría a estos pequeños jugadores a ingresar a un mercado más reducido sin posibilidades de crecimiento. Lo anterior se denomina Barrera de Entrada, estas barreras surgen cuando algunos jugadores poseen ventaja sobre los demás competidores potenciales generando variaciones de precios altos respecto a jugadores más pequeños, lo que imposibilita el ingreso de otro tipo de jugadores que no posean la misma capacidad competitiva. Lo anterior genera a segunda barrera al comparar la superioridad que poseen los grandes jugadores en cuanto a los costos de producción y distribución del producto. Si juntamos las dos anteriores, se genera una tercera barrera donde se muestran que los costos de producción disminuyen a medida que el nivel de producción aumenta, lo que obliga al nuevo jugador entrante con un nivel de producción equiparable a los grandes jugadores, llevándolo a posibles pérdidas y bajando su nivel de competitividad (Gonzales Aguirre, 2008).

Además de las anteriores barreras de ingreso que se le presenta a los nuevos jugadores, también existen barreras legales que, en el caso de Colombia, limitan el ingreso de pequeños generadores al mercado eléctrico. Otras barreras son las naturales, pues es diferente la capacidad de producción de la energía eléctrica en diferentes puntos del país. Y la última son barreras internas de cada empresa con sus políticas de manejo, pues estas pueden no ser beneficiosas en un mercado con competencias mayores. Es recomendable, si se desea aplicar teoría de juegos al mercado colombiano, verificar las tres barreras anteriores para permitir un juego más equitativo con recompensas acordes a cada jugador, pues realizar competencias en juegos no equitativos conlleva a pérdidas económicas importantes y, hasta cierto punto, se puede ver afectado el rendimiento de los sistemas.

---

## 9. Conclusiones

Aunque hoy en día el modelo de despacho económico usado en varias partes del mundo evita el uso de teoría de juegos, este tipo de estudios se realizan por la facilidad que tiene este tipo de algoritmos de ser aplicados a diferentes casos. En el caso de despacho económico, se deben tener en cuenta muchas variables que entran a restringir el desarrollo de este tipo de elementos, ya que las condiciones del sistema no permiten un control total en cuando al flujo eléctrico, esto se da por la manera como se tiene en cuenta la energía.

Los desarrollos logrados dependen de cómo se encuentre configurado el sistema de mercado eléctrico; diferentes formas de mercado eléctrico cambian los modelos económicos de los mismos y, al mismo tiempo, el modelo trabajado en teoría de juegos. Por lo anterior, la comparación entre los resultados obtenidos dependerán netamente de la forma de mercado y, sumado a esto, los jugadores que entran en el mercado regulatorio de la energía eléctrica.

Además de la normatividad a aplicarse en este tipo de modelos, es importante no implementar políticas y normativas de otros lugares, especialmente modelos europeos, ya que difieren mucho, tanto cultural como técnicamente, a las capacidades del país. Esto se debe pensar en miras de respetar y mantener la diversidad cultural y natural del país, pues muchas políticas energéticas implementadas no cumplen los requisitos técnicos, culturales y naturales del país, produciendo pérdidas importantes.

---

## Referencias bibliográficas

Azevedo, E. M., Correia, P. B., Correia, T. B., & Munhoz, F. C. (2003). Game Theory Competitive Models for Electric Energy Trade. Obtenido de Facultad de Ingeniería Mecánica-UNICAMP: Game Theory Competitive Models for Electric Energy Trade

Cicarelli, F., & Pisani, C. (2011). Game Theory and Analysis of Competitive Dynamics for Industrial Systems . Obtenido de The Application of the Game Theory on Electric Energy Markets : <https://www.docenti.unina.it/webdocenti-be/allegati/materiale-didattico/146138>

Fabra, N. (2010). Funcionamiento y Diseño de los Mercados Eléctricos: ¿Qué nos enseña la Teoría de Juegos? . Obtenido de Ministerio de Energía, Turismo y Agenda Digital, Gobierno de España:

<http://www.minetad.gob.es/Publicaciones/Publicacionesperiodicas/EconomiaIndustrial/RevistaEconomiaIndustrial/393/NATALIA%20FABRA.pdf>

Gonzales Aguirre, J. M. (2008). Desarrollo de Inversiones en Mercados Eléctricos Oligopólicos. Santiago de Chile, Chile: Universidad Católica de Chile.

Mojica-Nava, E. (2015). Optimización y Control en Sistemas Distribuidos en Red. Notas de Clase .

Ramirez, C. R. (2015). Regulación Económica en Energía Eléctrica (presentación clase) . Bogotá.

Saguan, M., Keseric, N., Dessante, P., & Glachant, J. (2006). Market Power in Power Markets: Game Theory vs. Agent-Based Approach. Transmission & Distribution Conference and Exposition: Latin America, 2006. TDC '06. IEEE/PES. Caracas.

Villar, J., & Rudnick, H. (2002). Hydrothermal Market Simulator Using Game Theory: Assessment of Market Power. IEEE Power Engineering Review , 22 (11), 57.

Watts Casimis, D. (1998). Teoría de Juegos Aplicada al Mercado Eléctrico Chileno. . Santiago de Chile, Chile: Pontifica Universidad Católica de Chile. Escuela de Ingeniería.

Webb, J. N. (2007). Game Theory Decisions, Interaction and Evolution. London: Springer-Verlag London.

Yunpeng, W., Walid, S., Zhu, H., Vincent Poor, H., & Basar, T. (2014). A Game-Theoretic Approach to Energy Trading in the Smart Grid. IEEE Transactions on Smart Grid , 5 (3), 1439-1450.

---

1. Ingeniero Electricista de la Universidad Nacional de Colombia. Estudiante Maestría en Ingeniería Eléctrica, Universidad Nacional de Colombia. [jlgutierrez@unal.edu.co](mailto:jlgutierrez@unal.edu.co)

2. Ingeniero de Sistemas, Universidad Autónoma de Colombia. Magister en Economía. Magister en Teleinformática. Phd. en Estudios Políticos. Phd en Ingeniería Informática. Profesor Titular y Director del grupo de investigación Internet Inteligente, Universidad Distrital Francisco José de Caldas. [osalcedo@udistrital.edu.co](mailto:osalcedo@udistrital.edu.co)

3. Ingeniero Electrónico, Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Especialista en Teleinformática. Magister en Administración. Profesor Asociado e integrante del grupo de investigación GIIRA, Universidad Distrital Francisco José de Caldas. [jmsanchezc@udistrital.edu.co](mailto:jmsanchezc@udistrital.edu.co)

---

Revista ESPACIOS. ISSN 0798 1015  
Vol. 39 (Nº 42) Año 2018

[Índice]

[En caso de encontrar un error en esta página notificar a [webmaster](#)]

©2018. revistaESPACIOS.com • @Derechos Reservados